Osaka University Knowledge Archive

Title	二次元閉集合体ノ上ノ測地線ノ延長
Author(s)	矢島, 猛
Citation	全国紙上数学談話会. 2(5) p.106-p.111
Issue Date	1947-06-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75179
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

44. 二次元開集合体ノ上ノ測地線ノ延長

矢 島 　猛（阪大）

1. K.Menger ニヨレバ compact ナ距離空間ガ convex（即チ任意ノ二点 a, b ニ対シ少クモ一点 c ガ存在シテ $ac+cb=ab$ トナル. 此ノトキ c ヲ a, b ノ間ノ点ト云ヒ $c \in \overline{ab}$ デ表ハス）ナルトキハ任意ノ二点 a, b ヲ結ブ測地線分（以下 g.S ト略記スル）$\overline{ab}$ ガ存在シテ其ノ長サハ丁度 ab ニ等シイ。従テ開集合体上ノ二点 a, b ヲ結ブ g.s. $\overline{ab}$ ヲ延長シテ行クトキハ（c ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点トハ $ab+bc=ac$ ナルコト）遂ニ e ナル点ガ存在シテ $\overline{ae}$ ハ延長出来ナイ，即チ任意ノ x ニ対シ $ae+ex>ax$ トナル. 此ノ点 e ヲ a 又ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点ト名付ケ，スベテノ b ニ対シ $\overline{ab}$ ノ最遠点ノ集合ヲ $E(a)$ デ表ハス。

complete analytic Riemanian surface ノ上デノ $E(a)$ ノ状態ニ関シテハ既ニ S.B. Myers ガ Duke Math. Jour. vol I, II ニ種々ノ結果ヲ報告シテ居ル。以下此ノ問題ヲ距離幾何学的ニ取扱ッテミマウ 先ヅ仮定トシテ，

- P 1. Ω 二次元開集合体デ convex ナ距離空間
- P. 2. 実数 $\delta>0$ ガ存在シテ $ab<\delta$ ナラバ $\overline{ab}$ ハ唯一ツ存在スル
- P. 3. 任意ノ g.s ハ若シ延長出来レバ其ノ延長ハ一意ニキマル 即チ p, q ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点ナラバ $p \in \overline{bq}$ 又ハ $q \in \overline{bp}$

ヲトル. P_2, P.3, ハ誌上談話会第3号工藤氏ノ geodesic space ノ条件 C ト殆ンド同ジデアル. 以下ナルベク工藤氏ト同ジ記号ヲ使ウコトニスル. 証明スベキコトハ

定理 　P_1-P_3 ヲ満足スル Ω デハ $E(a)$ ハ一次元連結集合デアル

デアルガ 証明ハ長クナルカラ出来ルダケ簡単ニ述ベル.

2. g.s ノ基本的性質

(2·A) a, b ヲ結ブ g.S ガ二ツアレバ $b \in E(a)$ デアル. 此ノ図形ヲ slit ト名付ケル.

(證) 二ツノ $g.S$ ヲ $\overline{ab^1}$, $\overline{ab^2}$ トシ各々ハ a, b 以外ト＝共通点ヲ持タナイトスル. $b \neq E(a)$ トスレバ $\overline{ab'}$ ノ延長ノ点 C ガ存在スル. C ハ $\overline{ab^2}$ ノ延長ノ点デモアル. $P \in \overline{ab'}$, $g \in \overline{ab^2}$ トスレバ P, g ハ $\overline{Cb}$ ノ延長ノ点デ且 $P \notin \overline{gb}$, $g \notin \overline{Pb}$. 故＝ $P.g$. ＝矛盾 若シ $\overline{ab'}$, $\overline{ab^2}$ ガ共通点ヲ持テバ二ツノ $g.S$ ハ一致スル. 仮定＝反ス.

(2.B) $a_n \to a$, $b_n \to b$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} \overline{a_nb_n}$ ハ又 $g.S$ デ $\overline{ab}$ ノ一ツデアル. 特＝ $b \neq E(a)$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} \overline{a_nb_n} = \overline{ab}$ デアル (證略).

(2.C) $\overline{a_nb_n} \to \overline{ab}$ ナラバ $\overline{a_nb_n}$ ハ最遠点 e_n ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点 e 又ハ $\overline{ae}$ ノ間ノ点＝收斂スル (證略)

3. 近傍

近傍系トシテハスベテ円近傍ヲトル. P ノ ε- 近傍ヲ $S(P, \varepsilon)$ デ表ハス Ω ハ compact ダカラ Euclid 平面ト位相合同ナ有限個ノ近傍デ覆ヘル. 從テ $\delta' > 0$ ナル実数ガアッテ $S(P, \delta'/2)$ ハ此ノ近傍系ノドレカ＝含マレル 即チ任意ノ P ＝対シ $S(P, \delta'/2)$ ハ Euclid 平面ト位相合同＝ナル. 便宜上 $\delta' > \delta$ ト仮定シテヨク.

次＝ $g.S.$ $\overline{ab}$ ノ右側トカ左側トカノ概念ヲ厳密＝定義スル必要ガアルガ長クナルカラ省略スル ε ヲ充分小＝スレバ $S(c, \delta)$ $c \in \overline{ab}$ ハ $\overline{ab}$ ＝ヨリ二ツノ部分＝分ケラレル. 從テ $\overline{ab}$ ノ近傍＝於テハ右側, 左側ト言ッテモ不自然デナイ. a カラ b ノ方向＝從テ右側, 左側ヲ夫々 $\overline{ab}$ ノ右側, 左側ト言フコト＝スル

4. 三角形ノ内部.

三点 a, b, c 及ビ $g.S.$ $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ ノナス図形ヲ三角形トイフ. 辺 頂点等ノ意味ハ明ラカ. 今 $\triangle abc$ ガ Ω ヲ二ツノ部分＝分ケ辺上ノ二点ヲ結ブ $g.S$ ガ常＝一方ノ部分＝含マレルトキ $\triangle abc$ ヲ正則, $g.S$ ヲ含ム部分ヲ $\triangle abc$ ノ内部トイフ.

(4A) $\triangle abc \subset S(P, \frac{\delta}{2})$ ナラバ $\triangle abc$ ハ正則デアル

(證) $S(P, \frac{\delta}{2})$ ハ Euclid 平面ト位相合同デアルカラ $\triangle abc$ ハ Ω ヲ二ツノ部分＝分ケル. $S(P, \frac{\delta}{2})$ ＝含マレル部分ヲ (辺ヲ

含マナイ)A，他方ヲBトスル．$x \in A$ニ対シ $\overline{ax} \subset A$ ナラバxヲA_1ノ点，$\overline{ax} \cdot B \neq 0$ ナラバ xヲA_2ノ点トスル．$A = A_1 + A_2$．Aハ連結ダカラ $H(A_1, A_2) = A_1 A_2 + A_1 \bar{A}_2 \neq 0$．$A_1 \bar{A}_2 \neq 0$ トスル．$x \in A_1$，$x_n \in A_n$ ガアッテ $x_n \to x$．$\lim_{n \to \infty} \overline{ax_n}$ ハ a, x ヲ結ブg.Sデ $\overline{ax}$ ト異ナル．$\overline{ax}$ ハ slit ニナリ $ax < \delta$ ナルコトニ矛盾スル．故ニ $A_1 = 0$ 又ハ $A_2 = 0$．$\bar{A}_1 A_2 \neq 0$ ナルトキモ同ジ．

$A_1 = 0$ トスル．$\overline{ax}$ $(x \in A)$ ハ必ズ $\overline{bc}$ ニ交ハルカラ $ax \geqq \frac{\delta}{2}$ トナリ矛盾．故ニ $A_2 = 0$．従テ $\overline{ax} \subset A$．極限ヲ考ヘルト $x \in \overline{bc}$ ノトキモ同ジコトガ言ヘル．$\overline{bx} \subset A$，$\overline{cx} \subset A$ ナルコトモ同様ニ言ヘル．次ニ Δabc ノ辺上ノ二点 d, e ヲトル．$d \in \overline{bc}$，$e \in \overline{ab}$ トスル．Δabd ニツイテ Δabc ト同ジコトヲ考ヘAニ相当スル部分ヲA'トスレバ $\overline{de} \subset A' \subset A$．（證終）

次ニ Δabc ニ於テ $\overline{ab}$，$\overline{ac}$ 上ニ p, q ヲトリ $\frac{ap}{ab} = \frac{aq}{ac}$ トスルトキ $\overline{pq}$ ヲ Δabc ノ a ニ対スル緯線"，其ノ長サノ上限ヲ"aニ対スル幅"ト名付ケル．又 $x \in \overline{bc}$ トaヲ結ブg.Sヲ"aニ対スル経線"ト名付ケル．若シ Δabc ガ Ωヲ二ツノ部分ニ分ケaニ対スル緯線ガ其ノ一方ノミニ含マレルトキ其ノ部分ヲ"aニ対スル内部"トイヒ，aニ対スル経線ガaニ対スル内部ノミニ含マレルトキ Δabc ヲ基本三角形ト名付ケル．以後間違ヒヲ起サナイトキハ"aニ対スル"ヲ省ク．

(4.B)　Δabc ニ於テ aニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナラaニ対スル内部ガアル．

（證）$\overline{ab}$，$\overline{ac}$ ヲ緯線 $\overline{p_i q_i}$ ニヨリ細分シ $p_i p_{i+1} < \frac{\delta}{4}$，$q_i q_{i+1} < \frac{\delta}{4}$ トスル　$\Delta p_i p_{i+1} q_i$，$\Delta q_i p_{i+1} q_{i+1}$ ハ夫々 $S(p_i, \frac{\delta}{2})$，$S(q_i, \frac{\delta}{2})$ ニ含マレルカラ正則ニナリ従テ内部ガアル．各三角形ノ作リ方カラ Δabc ハ Ωヲ二ツノ部分ニ分ケル．緯線ガ其ノ一方ニ含マレ且ソレガ $\Delta p_i p_{i+1} q_i$ 等ノ内部ト一致スルコトハ，四辺形 $p_i p_{i+1} q_{i+1} q_i$ ガ $\overline{p_{i+1} q_i}$ ノ中点ヲ中心トスル半径 $\frac{\delta}{2}$ ノ円内ニ含マレルコトカラ，$\overline{p_i p_{i+1}}$ 上ノ点ヲ(4.A)ノa点，四辺形ノ

内部ヲAト考ヘルコトニヨリ (4.A) ト全ク同様ニシテ得ラレル.

(4.C) Δabc ニ於テ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナラ (i) 内部ノ各点ヲ通リ少クモ一ツノ縦線ガアル. (ii) 二ツノ縦線ハ共通点ヲ持タナイ.

(證) 内部ノ点 e ヲ通ル縦線ガ存在シナイトスル. 縦線 $\overline{pq}$ ヲ引キ e ガ Δopq ノ内部ニアレバ P ヲ A ノ点, 外部ニアレバ B ノ点トスル. H(A,B) ノ論法ヲ使ヘバ e ヲ中ニ含ム *slit* ガ出テクル。幅ガ $\delta/4$ ヨリ小サイコトニ矛盾. (ii) ハ二ツノ g.S ガ共通点ヲ持テバ交ハルコトガラ容易ニ出ル

5. ノヨイヲ最初ノ定理ノ証明ヲスル. ソノ前ニ予備定理ヲ二ツ掲ゲル。

予備定理 1. Δabc ハ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナル基本三角形トスル. 内部ニ $e\in E(a)$ ガアレバ $\overline{bc}$ 上ニモ $f\in E(a)$ ガアッテ e, f ハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル

(証) e ヲ通ル縦線ヲ p_0q_0 トシ, $x\in bc$ ト a ヲ結ブ g.S. $\overline{ax}$ ヲ引ケバ必ズ $\overline{p_0l}$ 又ハ $\overline{eq_0}$ ノ間ノ点ヲ通ル $\overline{p_0l}$ ヲ通レバ x ヲ A ノ点, $\overline{eq_0}$ ヲ通レバ B ノ点トシテ H(A,B) ノ論法ヲ用フレバ $f\in\overline{bc}$ ガアッテ $\overline{af}$ ハ二ツアリ *slit* ニナル. 故ニ $f\in E(a)$. コノコトハ任意ノ縦線ニツイテ言ヘル. 即チ任意ノ縦線 $\overline{pq}$ 上ニ $r\in E(a)$ ガアリ, $\overline{ar}$ ハ二ツアッテ一方ハ $\overline{p_0l}$, 他方ハ $\overline{eq_0}$ ニ交ハル 夫々 $\overline{ar}^1$, $\overline{ar}^2$ トスル. r ガ連続ナルコトハ $\overline{p_iq_i}\to\overline{pq}$ ナルトキ $r_i\to r$ トスレバ $r\in E(a)$ デ $\overline{ar}$ ガ二ツアルコトヲ言ヘバヨイ. ソレハ $\overline{ar_i}^1\to\overline{ar}^1$, $\overline{ar_i}^2\to\overline{ar}^2$ トスレバ $\overline{ar}^1, \overline{ar}^2$ ハ共ニ a, r ヲ結ブ g.S デ相異ナル. 故ニ $r\in E(a)$

予備定理 2. $b\in E(a)$ トシ c_i ハ $\overline{ab}$ ノ間ノ点 C ニ収斂スル $E(a)$ ノ点列トスル, シカラバ c_i ト $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル点列 b_i ガアッテ $b_i\to b$ トナル

(証) c_i ハスベテ $\overline{ab}$ ノ左側ニアルモノトシテモ一般性ヲ失ハナイ

(1) $\overline{ab}$ ノ左側カラ $d_i\to c$ トナル点列 d_i ヲ適当ニトレバ $\overline{ad_i}$

ノ最遠点 e_i ハ b ニ収斂スル。何者。d_i 如何ニトッテモ b ニ収斂シナイトスル. e_i ハ (2.C) ニヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点ニ収斂スル. ソノヤウナ点ノ上限ヲ $\overline{e}$ トスル。$\overline{e}$ ト b ノ間ノ点 f ニ左側カラ収斂スル点列 f_i ヲトレバ $\overline{af_i} \to af$ トナル (2.B). 故ニ $\overline{af_i}$ ノ間ノ点デ左側カラ c ニ収斂スル点列ガアル 矛盾. 次ニ $\overline{ad_i} \to \overline{ac}$, $\overline{d_ie_i} \to \overline{cb}$. 故ニ $\overline{ae_i} \to \overline{ab}$. i 充分大ニスレバ $\triangle abe_i$ ノ a ニ対スル角ハ任意ニ小ニナルカラ内部ガアル. 又 $c_i \to c$ ダカラ $\triangle abe_i$ ノ内部ニ c_j ガアル. 改メテ c_i ト書ク.

(2) $\triangle abe_i$ ニ於テ経線 pq ヲ充分 a ニ近クトレバ $\triangle apq$ ハ正則, 従テ基本三角形デアル. 今 $\triangle apq$ ガ基本三角形ニナルヤウナ $\overline{pq}$ ノ上限ヲ $\overline{p_iq_i}$ トスル. $b_i \in E(a)$ ガ $\overline{p_iq_i}$ ノ上ニアッテ b_i ト c_i トハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル.

(3) $\overline{p_iq_i} \neq \overline{be_i}$ ナラバ $\overline{p_iq_i}$ ヲ内部ニスルヤウナ $\triangle a p_i^n q_i^n$ ($\lim_{n\to\infty} \overline{p_i^n q_i^n} = \overline{p_iq_i}$) ヲ作レバ基本三角形デナイカラ $\triangle a p_i^n q_i^n$ 外部ニアル経線 $\overline{ax_i^n}$ ガアル. 従テ $\lim_{n\to\infty} \overline{ax_i^n} = \overline{ax_i}$ ハ $\triangle ap_iq_i$ ノ外部ニアル. $\triangle ap_iq_i$ ノ内部ニアル $\overline{ax_i}$ モ存在スル. 故ニ $x_i \in E(a)$ シカシ x_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ部分集合デ結バレルカドウカハ不明デアル.

(4) $i \to \infty$ ナルトキ $\overline{p_iq_i} \to b$ デアル, 何者 若シ然ラズトスレバ x_i ノ極限ハ又 $E(a)$ ノ点デアルカラ $\overline{ab}$ ノ間ノ点デ $E(a)$ ニ属スルモノガアル 矛盾. 故ニ $\overline{p_iq_i} \to b$ 従テ $b_i \to b$.

定理ノ証明 $E(a)$ ハ連結集合デナイトスル. $E(a) = E_1$ $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$, $H(E_1, E_2) = 0$ ト出来ル. $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ トシテ $\overline{e_1e_2}$ ヲ作ル. $\overline{e_1e_2}$ ノ間ノ点ヲ A, B 二組ニ分ケテ $x \in A$ ナラバ $\overline{ax}$ ノ最遠点ハ E_1 ニ属シ, $x \in B$ ナラバ E_2 ニ属スヤウニスル. $\overline{e_1e_2}$ ハ連結集合ダカラ $H(A,B) \neq 0$, $\overline{A}B \neq 0$ トスル. $x \in A$, $x_n \in B$, $x_n \to x$ トナル点列ガアル. $\overline{ax}$ ノ最遠点ヲ b, $\overline{ax_i}$ ノ最遠点ヲ c_i トスレバ仮定ニヨリ $c_i \to b$ デナイカラ (2.c) ニヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点ニ収斂スル. シカシ予備定理 2 ニヨリ $b_i \in E(a)$ ガアッテ c_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレルカラ $b_i \in E_2$. 且 $b_i \to b$. 矛盾.

次ニ $E(a)$ ハ連結集合ダカラ $dim. E(a) \neq 0$. 又 $E(a)$ ハ Ω ノ開集合ヲ含マナイカラ $dim. E(a) \leqq 1$. 故ニ $dim\, E(a) = 1$.

—1947. 4. 23—